20. Prove that the set $Z_u = \{[0],[1],[2],[3]\}$ is a commutative ring with respect to the binary operation addition modulo and multiplication modulo $+4, X_4$.

$Z_u = \{[0],[1],[2],[3]\}$ என்ற கணமானது ஈருறுப்பு செயலியான கூட்டல் மட்டு மற்றும் பெருக்கல் மட்டு $+4, X_4$ ஆகியவற்றைப் பொறுத்து ஒரு பரிமாற்ற வளையம் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

NOVEMBER/DECEMBER 2025

CMA51 — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours | Maximum : 75 marks

Shanmuga Industries Arts & Science College T.V.Malai

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. State any two properties of a group.

   ஒரு குலத்தின் ஏதேனும் இரண்டு பண்புகளை குறிப்பிடுக.

2. In a group G, prove that an element $a \in G$ such that $a^2 = e$, $a \neq e$, iif $a = a^{-1}$.

   $a \in G$ என்ற உறுப்பானது $a^2 = e$, $a \neq e$ ஆக ஒரு குலத்தில் இருக்கத் தேவையானப் போதுமான நிபந்தனை $a = a^{-1}$ என நிறுவுக.

3. Define homomorphism

   செயல் மாறாக் கோர்த்தல் வரையறு.

4. Every subgroup of an abelian group is a normal subgroup.

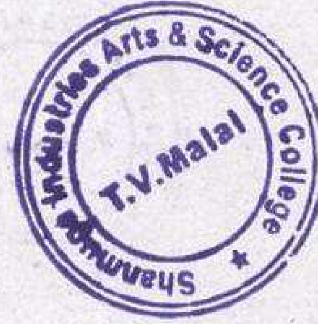
பரிமாற்றுக்குலத்தின் ஒவ்வொரு உட்குலமும் ஒரு சாதாரண உட்குலமாகும் என நிறுவுக.

5. Show that the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ is odd, while the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ is even.

வரிசைமாற்றம் $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ஒற்றைப்படை என்றும், வரிசைமாற்றம் $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ இரட்டைப்படை என காட்டுக.

6. Express the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ as a product of transposition.

இடமாற்றத்தின் பெருக்கலாக வரிசைமாற்றத்தை $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ வெளிப்படுத்தவும்.



18. Let $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ and $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ be a permutation of A.

(a) Write P as a product of disjoint cycles.

(b) Compute P^{-1}

(c) Compute P^2

(d) Find the period of 'P' that is the smallest positive integer 'K' such that $p^K = 1_A$.

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ மற்றும் $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ A இன் வரிசைமாற்றமாக இருக்கும் எனில்

(அ) P யை பெருக்கலின் பிரித்தல் சுழற்சியாக எழுது

(ஆ) கணிக்க: P^{-1}

(இ) கணிக்க: P^2

(ஈ) $p^K = 1_A$ போன்ற மிகச் சிறிய நேர்மறை முழு எண் 'K' ஆக இருக்கும் எனில் 'P' இன் காலத்தைக் கண்டறி.

19. If 'R' be a commutative ring with unity of whose ideals are {0} and R, then 'R' id a field.

அலகு உறுப்புடன் பரிமாற்றுப் பண்புடைய வளையம் 'R' ன் சீர்மங்கள் {0} மற்றும் R, எனில் R என்பது களம் என்பதை நிறுவுக.

(b) Show that the quotient ring $\frac{R}{I}=\frac{z}{nZ}$ is isomorphic to Z_n if $R=Z$ and $I=nZ$ for some $n>1$.

சில $n>1$க்கு $R=Z$ மற்றும் $I=nZ$ எனில் $\frac{R}{I}=\frac{z}{nZ}$ என்ற கோட்பாட்டின் பகுவளையம் Z_n-க்கு சம ஒப்புமை எனக் காட்டுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If 'a' and 'b' are any two elements of a group $(G,*)$ then show that G is an abelian group iff $(a*b)^2=a^2*b^2$.

'a' மற்றும் 'b' ஒரு குலத்தின் ஏதேனும் இரண்டு உறுப்புகள் $(G,*)$ எனில் G என்பது ஒரு பரிமாற்றுக் குலம் என்றால் மற்றும் இருந்தால் மட்டுமே $(a*b)^2=a^2*b^2$ ஆக இருக்கும் எனக் காட்டுக.

17. Prove that the order of a subgroup of a finite group divides the order of the group.

ஒரு முடிவுறு கலத்தின் உட்குலத்தின் வரிசையானது குலத்தின் வரிசையைப் பிரிக்கிறது என நிறுவுக.

7. Prove that every field is an integral domain.

ஒவ்வொரு புலமும் ஒரு ஒருங்கிணைந்த களம் என்பதை நிரூபி.

8. Define Integral domain.

ஒருங்கிணைந்த களத்தை வரையறு.

9. Give an example of a ring which is not a field.

களம் அல்லாத வளையத்திற்கு உதாரணம் கூறு.

10. Define quotient ring.

பகுவளையத்தை வரையறுக்கவும்.

Shanmuga Industries Arts & Science
T.V.Malai

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) The identity element of a subgroup is same as that of the group.

ஒரு துணைக்குலத்தின் அடையாள உறுப்பு அந்தக் குலத்தின் அடையாள உறுப்புக்கு சமம்.

Or

(b) Prove that intersection of two subgroups of a group is a subgroup of G.

ஒரு குலத்தின் இரண்டு துணைக்குலங்களின் குறுக்குவெட்டு G இன் துணைக்குலம் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

12. (a) Let $\langle H,*\rangle$ ne a subgroup of $\langle G,*\rangle$. Then show that $\langle H,*\rangle$ is a normal subgroup iif $a*h*a^{-1}=H,\ \forall a\in G$.

$\langle H,*\rangle$ என்பது $\langle G,*\rangle$ இன் துணைக் குலம். பின்னர் $\langle H,*\rangle$ என்பது ஒரு சாதாரண துணைக்குலம் என்பதைக் காட்டுங்கள் $\Leftrightarrow a*h*a^{-1}=H,\ \forall a\in G$.

Or

(b) Let $f:G\to G'$ be a homomorphism then the Ker (f) is a normal subgroup of G.

$f:G\to G'$ என்பது ஒரு செயல் மாறாக் கோர்த்தல். பின்னர் Ker (f) என்பது G இன் சாதாரண துணைக்குலகமாக இருக்கட்டும்.

13. (a) State and prove Cayley's theorem.

கெயிலியின் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபிக்கவும்.

Or

(b) If $x=(1,2,3)$, $y=(2,4,3)$, $z=(1,3,4)$ then show that $xyz=1$.

$x=(1,2,3)$, $y=(2,4,3)$, $z=(1,3,4)$ என்றால் $xyz=1$ என்று காட்டு.

14. (a) Let $(R,+,\cdot)$ be a ring, then

(i) $a\cdot 0=0\cdot a=0$, for every $a\in R$

(ii) $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)=(-a)\cdot b$ for all $a,b\in R$.

$(R,+,\cdot)$ வளையம், எனில்

(i) $a\cdot 0=0\cdot a=0$, for every $a\in R$

(ii) $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)=(-a)\cdot b$ for all $a,b\in R$

நிறுவுக.

Or

(b) A commutative ring $(R,+,\cdot)$ is an integral domain iff the cancelation laws hold in 'R'.

ஒரு பரிமாற்ற வளையம் $(R,+,\cdot)$ என்பது 'R' இல் உள்ள ரத்துச் சட்டங்கள் ஒரு ஒருங்கிணைந்த களமாகும் எனக் காட்டுக.

15. (a) Show that $(Z,+,X)$ is an integral domain where Z is set of all integers.

Z என்பது அனைத்து முழு எண்களின் தொகுப்பு எனில் $(Z,+,X)$ என்பது ஒரு எண் அரங்கம் என்பதைக் காட்டுக.

Or

Shanmuga Industries Arts & Science College T.V.Malai